

Geochronometrie

Grundlagen einer relativistischen Raum-Zeit

(mit disjunkten Zeitfolgen)

H. Frank

Berlin 2009

Berichte aus der Mathematik

Herbert Frank

Geochronometrie

Grundlagen einer relativistischen Raum-Zeit

(mit disjunkten Zeitfolgen)

Shaker Verlag
Aachen 2012

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Copyright Shaker Verlag 2012

Alle Rechte, auch das des auszugsweisen Nachdruckes, der auszugsweisen oder vollständigen Wiedergabe, der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen und der Übersetzung, vorbehalten.

Printed in Germany.

ISBN 978-3-8440-1450-1

ISSN 0945-0882

Shaker Verlag GmbH • Postfach 101818 • 52018 Aachen

Telefon: 02407 / 95 96 - 0 • Telefax: 02407 / 95 96 - 9

Internet: www.shaker.de • E-Mail: info@shaker.de

VORWORT

Als ich im Herbst des Jahres 1959 eine Aspirantur bei A. D. Alexandrov an der Leningrader Universität antrat, war ich für ihn kein Unbekannter. Bereits in meiner Studienzeit hatte ich die letzten beiden Studienjahre regelmäßig das Leningrader Geometrieseminar, dem A. D. Alexandrov vorstand, besucht und dort über meine Diplomarbeit vorgetragen, auch in das gesellige Leben dieses Seminars war ich voll einbezogen. Es bestand dort eine sehr angenehme und freundschaftliche Arbeitsatmosphäre.

In diesem Jahr 1959 ist gerade die Arbeit [1] A. D. Alexandrovs erschienen, die Übersetzt den Titel „Die Relativitätstheorie als Theorie der absoluten Raum-Zeit“ trägt, in der er prägnant – auch in Weiterführung früherer Veröffentlichungen – seine philosophische Sicht insbesondere auf die spezielle Relativitätstheorie darlegte, aber auch den grundsätzlichen Ansatz des Vorgehens beim Aufbau dieser Theorie umriß. So war es sicher kein Zufall, daß er mir die Aufgabe stellte, einen mathematisch strengen Zugang zur speziellen Relativitätstheorie zu finden, der sich an seinen in der Arbeit [1] dargelegten Thesen orientiert. Dabei lenkte er meine Aufmerksamkeit auf die folgende Literatur:

- A. A. Robb [18]. Diesem Buch habe ich lediglich erste Anregungen zur Axiomengruppe I: „Die Axiomengruppe der Zeit“ entnommen. Das dort dargelegte Axiomensystem mit z. T. recht komplizierten Axiomen lag außerhalb meiner Intentionen.
- F. Schur [19]. Aus diesem Buch habe ich die geometrische Grundidee zur Axiomengruppe II: „Die Axiome der Raum-Zeit-Struktur“ übernommen.
- H. Reichenbach [15]. Dieses Buch lieferte mir in seinem mathematischen Ideengehalt den Grundstock zur Axiomengruppe III: „Die Axiome der Signale“.

Mit Enthusiasmus stürzte ich mich in die Arbeit. Mußte aber bald einsehen, daß sich, den Anregungen aus der Literatur [19] und [15] folgend, kein axiomatischer Aufbau der Einsteinschen speziellen Relativitätstheorie ergeben konnte, weshalb auch das Interesse A. D. Alexandrovs an meiner Arbeit bald erlosch. Es entstand zwar auf diesem Wege eine relativistische Raum-Zeit-Theorie, in der, wie ich meine, grundsätzliche philosophische Positionen aus der Arbeit [1] berücksichtigt sind, aber es konnte auf diesem Wege nicht ein Äquivalent der Einsteinschen Relativitätstheorie entstehen, weil – wie sich später herausstellte – auf diese Weise die Euklidizität des Raumes aufgegeben wird. Selbst im sehr speziellen Fall der starren Körper, in denen für zwei beliebige Punkte A_1 und A_2 zwar der Zusammenhang

$$\varrho_{A_1 A_2}(\tau) = \delta(A_1 A_2) \cdot \varrho_{A_0 A_E}(\tau)$$

zwischen der Abstandsmessung ϱ durch Signale und der Längenmessung δ mittels Stäben – $A_0 A_E$ ist der Einheitsmaßstab – besteht (s. Satz IV,38), kann nicht geschlossen werden, daß in dieser Beziehung die metrische Fundamentalform des pseudoeuklidischen Raumes mit dem Index 1 (des Minkowski-Raumes) vorliegt, zumal

die Geometrie dieses Körpers keineswegs euklidisch sein muß (vgl. die Sätze V.50 und V.51).¹ Damit liefert die Geochronometrie Grundlagen einer anderen, von der speziellen Relativitätstheorie Einsteins in vielerlei Hinsicht verschiedenen relativistischen Raum-Zeit-Theorie.

Um den Erfolg meiner Aspirantur nicht zu gefährden brach ich die Arbeit an diesem Thema erst einmal ab. Aber ich war neugierig geworden und wollte gerne wissen, wie die Raum-Zeit-Theorie wohl aussehen mag, wenn dieser Weg konsequent zu Ende gegangen wird. Allerdings erst 10 Jahre später kam ich auf diese Thematik zurück. Ich gründete in den 1970er Jahren an der Humboldt-Universität zu Berlin das Seminar „Geochronometrie“ – der Name steht synonym für Raum-Zeit-Theorie, obwohl der Name „Chronogeometrie“ sicher treffender gewesen wäre. Im Rahmen dieses Seminars entstand mit einigen Mitarbeitern und Studenten eine fruchtbare gemeinschaftliche Arbeit. Eine tragende Rolle kam in diesem Seminar L. Wagner zu: von ihm stammen auch wesentliche Beiträge zur Entwicklung der Geochronometrie (s. [8], [21] und [22]). An der abschließenden, jetzt vorliegenden Fassung dieser Theorie konnte er leider nicht mehr mitwirken; er verstarb auf tragische Weise im Jahre 1998.

Mit der Übersiedlung von A. D. Alexandrov nach Novosibirsk im Jahre 1964 ging meine Verbindung zu ihm fast völlig verloren. Erst viel später erfuhr ich, daß er sich dort wieder der axiomatischen Begründung der speziellen Relativitätstheorie zuwandte, und zwar unter dem Namen „Chronogeometrie“ (s. Report von A. K. Guts [10]). Darunter wollte er eine Forschungsrichtung verstanden wissen, die in Anlehnung an die Grundlagen der Geometrie das Ziel verfolgte, ein sehr einfaches und intuitiv einsichtiges Axiomensystem zu finden, das der speziellen Relativitätstheorie äquivalent ist (s. A. D. Alexandrov [2]). Dieses Vorhaben wurde jedoch letztendlich nicht von Erfolg gekrönt.

Mit der vorliegenden Monographie wird eine axiomatisch begründete Raum-Zeit-Struktur vorgestellt, in der in einem späteren, zweiten Schritt Elemente einer relativistischen theoretischen Physik entwickelt werden sollen. Der axiomatische Aufbau macht diese Theorie übersichtlicher und durchschaubarer, insbesondere werden jene Stellen leichter sichtbar, an denen sich durch Veränderung, Weglassen oder Hinzufügen eines oder mehrerer Axiome eine Erweiterung, Einschränkung oder Verzweigung der Theorie ergibt. Außerdem wird in dieser Monographie eine vereinfachte Variante einer Geochronometrie dargelegt, in der Zeitfolgen keine gemeinsamen Momente haben sollen, um so erst einmal eine Überfrachtung der Theorie mit vielen Fallunterscheidungen zu vermeiden. Auf der Grundlage dieser vereinfachten Theorie können dann kompliziertere Varianten entwickelt werden. Übrigens gibt es bereits eine Variante einer Geochronometrie, die von meiner Schülerin K. Linke [11] erarbeitet wurde, in der die Zeitfolgen nicht disjunkt sind.

In der Axiomengruppe I – den Axiomen der Zeit (13 Axiome) – wird auf der Grundlage der Grundelemente „Momente“ und der Grundbeziehung „folgt nach“ über die Axiome I,1-7 der Begriff der Zeitfolge aufgebaut; das ist jeweils eine Men-

¹Wir vereinbaren aus anderen Kapiteln Definitionen, Sätze und Hilfssätze zu zitieren, indem wir ihrer Nummer die Nummer des betreffenden Kapitels voranstellen; bei Zitaten aus demselben Kapitel wird dessen Nummer nicht erwähnt.

ge aller jener Momente, die zueinander in der Beziehung „folgt nach“ stehen. Die weiteren Axiome sind so gewählt, daß die „Geometrie“ einer Zeitfolge die einer orientierten euklidischen Geraden ist, so daß mit Verweis auf einschlägige Literatur über „Grundlagen der Geometrie“ die Beweise einer Reihe von Sätzen nicht ausgeführt zu werden brauchten. Aus dieser Axiomengruppe folgt allerdings lediglich die Existenz von mindestens zwei Zeitfolgen, so daß als Modell für die Axiomengruppe I, ein Paar gleichorientierter, paralleler Geraden dienen kann.

In der Axiomengruppe II – den Axiomen der Raum-Zeit-Struktur (22 Axiome) – wird der Zusammenhang von Raum und Zeit hergestellt und die Raum-Zeit-Struktur des „Kosmos“ untersucht. Der Aufbau ist konstruktiv, d. h., als Ausgangsmaterial sind neben den Zeitfolgen nur die Grundelemente „Punkte“ gegeben, während solche Gebilde wie Gerade, Dreieck, Winkel, Ebene, Tetraeder, räumlicher Winkel und schließlich Raum sukzessive als Punktmengen in Bezug auf einen „Körper“ konstruiert werden müssen.

Mit der ersten Untergruppe – den Axiomen der Punkt-Zeit-Verknüpfung – wird zunächst mittels der Grundbeziehung „ist Eigenzeit“ eine Zuordnung zwischen Punkten und Zeitfolgen getroffen (Axiome II,1-2). Das gestattet jeweils alle Punkte, denen dieselbe Zeitfolge zugeordnet ist, die also dieselbe Eigenzeit besitzen, zusammenzufassen; eine solche Punktmenge heißt Körper. Die Körper spielen im weiteren eine fundamentale Rolle.

In der ersten Untergruppe wird außerdem die Zuordnung zwischen den Momenten verschiedener Zeitfolgen durch die Grundbeziehung „ist synchron“ hergestellt (Axiom II,3). Allerdings ihre eigentliche implizite Erklärung erfährt diese Grundrelation erst im Kapitel III, nachdem sie dort noch mit den universellen Wechselwirkungen zwischen Punkten, den „Signalen“ in Verbindung gebracht wird. Von der Anlage her ist die Grundbeziehung „ist synchron“ reflexiv; sie ist jedoch im allgemeinen weder symmetrisch noch transitiv.

Mit den nachfolgenden Axiomen der Gruppe II folgen wir F. Schur [19]. Das Axiom II,4 der zweiten Untergruppe – den Axiomen der Strecke – liefert zunächst den Begriff der Strecke, während in den übrigen Axiomen dieser Untergruppe (II,5-12) die Zugehörigkeit eines Punktes zu einer Strecke präzisiert und die Anordnung der Punkte in einer Strecke postuliert wird. Eine ausgezeichnete Rolle spielen dabei jene Strecken, deren Anfangs- und Endpunkt demselben Körper angehören – wir sprechen in diesem Fall von Stäben.

Über den Begriff der Verlängerung einer Strecke über deren Endpunkte hinaus (s. Definition II.5) gelangen wir zum Begriff der Geraden (bezüglich eines Körpers); darunter verstehen wir die Menge aller Punkte, die in einem gegebenen Moment der Eigenzeit eines Körpers einem Stab mit den Endpunkten aus diesem Körper und den Verlängerungen dieses Stabes über seine Endpunkte hinaus angehören (s. Definition II.7). Eine Gerade ist durch zwei beliebige ihrer Punkte aus dem Körper, bezüglich dessen sie definiert ist, eindeutig bestimmt, sie ist es im allgemeinen nicht durch zwei ihrer Punkte aus anderen Körpern. Den allgemeinsten Satz, den wir in dieser Hinsicht beweisen können, der aber den relativen Charakter des Begriffs Gerade nicht aufhebt, ist der Satz II.31.

Auf der Grundlage der Axiome der dritten Untergruppe – den Axiomen des

Körperdurchstichs und des Dreiecks (II,13-16) – in Verbindung mit den vorangegangenen Konstruktionen gelangen wir zum Begriff der Ebene (bezüglich eines Körpers). Darunter verstehen wir die Menge aller Punkte jener Geraden, die in einem gegebenen Moment der Eigenzeit eines Körpers durch eine Ecke und einen Punkt der dieser Ecke gegenüberliegenden Seite eines Stabdreiecks aus dem gegebenen Körper eindeutig bestimmt sind. In Analogie zu den Geraden ist eine Ebene durch drei beliebige ihrer Punkte in allgemeiner Lage aus dem Körper, bezüglich dessen sie definiert ist, eindeutig bestimmt (s. Satz II.97), sie ist es jedoch im allgemeinen nicht durch drei ihrer Punkte aus anderen Körpern. Die allgemeinste Aussage, die hierzu möglich ist, gibt der Satz II.99 wieder. Für die Aufklärung der Struktur der Ebene bezüglich eines Körpers spielen eine ganz wesentliche Rolle die vorausgegangenen Untersuchungen über Dreiecke und deren Ausbreitungen über ihre Ecken und Seiten hinaus sowie die Darlegungen über Winkel.

Die Axiome der dritten Untergruppe erhellen endgültig die nichtmetrische Struktur der Körper. Wir können nun beweisen (s. Satz II.48), daß jedem Stab nur Punkte aus demselben Körper wie seine Endpunkte angehören, woraus sich als einfache Folgerung ergibt: Jeder Körper ist konvex, d. h., mit zwei beliebigen seiner Punkte gehört ihm jeder Punkt des Stabes an, der diese Punkte als Endpunkte besitzt. Ferner, bezüglich der Körperdurchstiche – das sind die Punkte eines Körpers, die einer Geraden bezüglich dieses Körpers angehören – können wir sagen: Sie sind in einem gewissen Sinne offene und beschränkte Punktmengen (s. die Sätze II.50 und II.51).

Indem wir die bisherigen Axiome noch durch die Axiome der vierten Untergruppe – die Axiome der Dimension (II.17-18) – ergänzen, können wir die Skala unserer Konstruktionen abermals erweitern, um so schließlich zum Begriff des Raumes (bezüglich eines Körpers) zu gelangen. Der Aufbau wird zunächst, nur auf das Axiom II.17 gestützt, in Analogie zur Ebene über die Konstruktionen Tetraeder, Ausdehnung eines Tetraeders über seine Ecken, Kanten und Seiten sowie räumliche Winkel vollzogen. Diese Konstruktionen sind für die detailliertere Beschreibung der Struktur des Raumes bezüglich eines Körpers wesentlich. Unter einem Raum verstehen wir dabei die Menge aller Punkte jener Geraden, die in einem gegebenen Moment der Eigenzeit eines Körpers durch eine Ecke und einen Punkt der dieser Ecke gegenüberliegenden Seite eines Stabtetraeders desselben Körpers oder aber durch je einen Punkt zweier gegenüberliegender Kanten dieses Stabtetraeders bestimmt sind. Der Raum ist durch vier beliebige seiner Punkte in allgemeiner Lage aus dem Körper, bezüglich dessen er definiert ist, eindeutig bestimmt (s. Satz II.202). Obwohl dem Raum bezüglich eines Körpers stets alle Punkte des Kosmos angehören und er eindeutig bestimmt ist (s. Sätze II.229-230, zu deren Beweis nunmehr noch das Axiom II.18 herangezogen werden muß), ist er dennoch nicht durch vier beliebige Punkte des Kosmos in allgemeiner Lage eindeutig bestimmt; hier bietet sich lediglich der Satz II.205 an.. Damit ist auch der Raum – ebenso wie die Gerade und die Ebene – ein relativer Begriff, bezogen auf einen Körper. Er ist nicht einfach wie in den klassischen Geometrien die Menge aller Punkte, sondern ist in seiner Struktur außerdem an die Eigenzeit eines Körpers gebunden.

Die fünfte Untergruppe der Axiomengruppe II – die Axiome des Raumes, II.19-22 – schließen gewisse Lücken, um die Anordnung der Punkte im Raum befriedigend ergänzen zu können.

Durch die Axiomengruppe III – die Axiome der Signale (11 Axiome) – werden die letzten Grundelemente – die „Signale“ – und die letzte der Grundbeziehungen, nämlich „geht ab... kommt an“ implizit erklärt. Mit dieser Grundrelation werden Punkt-Moment-Tupel und Signale verknüpft und die Grundrelation „ist synchron“ präzisiert. Auf diese Weise erfahren Raum und Zeit eine endgültige unlösbare Verbindung.

Eingeleitet wird die Axiomengruppe III durch die Untergruppe der strukturellen Signalaxiome (8 Axiome). Die ersten drei dieser Axiome III,1-3 sind so gefaßt, daß alle notwendigen Konstruktionen mit Signalen ausführbar sind. Die anschließenden drei Axiome III,4-6 dienen dazu, unter allen Signalen eine besondere Klasse von Signalen herauszuheben, nämlich die Suprasignale, die die extremale Eigenschaft besitzen, unter allen Signalen die „schnellsten“ zu sein. Eben diese Signale werden dann im weiteren ausschließlich benutzt. Die letzten beiden Axiome III,7-8 dieser Untergruppe präzisieren die Grundbeziehung „ist synchron“. Die Idee, die der Untergruppe der strukturellen Signalaxiome zugrunde liegt, ist der Monographie [15] von H. Reichenbach entnommen.

Das Kapitel III hat in weiten Teilen überwiegend technischen Charakter. Dazu gehört insbesondere der Punkt 2, in dem die sogenannte Koeffizientenmethode für Punktepaare entwickelt wird. Dies geschieht in Anlehnung an H. Bondi, von dem offenbar diese Methode für die Darlegung der speziellen Relativitätstheorie zuerst vorgeschlagen wurde (siehe z. B. Bondi [4], vgl. auch D. Bohm [3]). Diese Methode ist zwar nicht sehr ergiebig, liefert aber immerhin das Gesetz der Synchronisation in allgemeiner Form – s. (3.2)– (3.4) – und die Zeitdilatation für endliche Intervalldauer – s. (3.52) – sowie in Differentialform – s. (3.120).

Der Punkt 3 ist schließlich der Untergruppe der metrischen Signalaxiome (3 Axiome) gewidmet. Vorbereitend darauf wird zunächst im Unterpunkt 3.1 der Abstandsbegriff eingeführt. Die Messung räumlicher Entfernungen wird bezüglich eines Körpers $\mathcal{K}(T_A)$ als die Messung der Dauer von Zeitintervallen seiner Eigenzeit definiert. Geht es dabei um den Abstand irgendeines Punktes B von einem Punkt A aus dem Körper $\mathcal{K}(T_A)$, so erfolgt seine Messung mit Hilfe einer Suprasignalpeilung in naheliegender Weise – s. (3.130). Geht es jedoch um die Messung des Abstandes zweier beliebiger Punkte B und C bezüglich des Körpers $\mathcal{K}(T_A)$, so ist diese nur durch ein relativ kompliziertes, mittelbares Meßverfahren mit Hilfe einer indirekten Suprasignalpeilung von einem Punkt A aus dem Körper $\mathcal{K}(T_A)$ nach dem Punkt C über den Punkt B möglich – s. (3.140). Diese Abstandsbegriffe sind im allgemeinen nicht symmetrisch. Die Gültigkeit von Dreiecksungleichungen – s. Unterpunkt 3.4 – ergeben sich erst auf der Grundlage der metrischen Signalaxiome, die im Unterpunkt 3.3 dargelegt werden.

Die Kompliziertheit der Abstandsmessung ist insbesondere der Asymmetrie und Intransitivität der Grundbeziehung „ist synchron“ geschuldet. Andererseits entspringen diesem Sachverhalt Begriffsbildungen – s. (3.165)–(3.167) – wie die Umlaufgeschwindigkeit $c_{ABC}(\tau_{A/C})$ eines Suprasignals von einem Punkt A eines gegebenen Körpers $\mathcal{K}(T_A)$ über zwei Punkte B und C und der Dreikörperaberration $\Phi_{ABC}(\tau_{A/C})$ für das geordnete Punktetripel (A, B, C) bezüglich des Körpers $\mathcal{K}(T_A)$ bzw. der Zweikörperaberration $\Phi_{ABAC}(\tau_{AC})$ für dieses Punktetripel, falls der Punkt C dem Körper $\mathcal{K}(T_A)$ angehört. Dabei verschwindet die Dreikörperaberra-

tion $\Phi_{ABC}(\tau_{A/C})$ für das geordnete Punktetripel (A, B, C) genau dann – s. Satz III,14 –, wenn die Grundbeziehung „ist synchron“ für die Momente t_C , $t_{B/C}$ und $t_{A/B/C}$ transitiv ist, während die Zweikörperaberration $\Phi_{ABA_C}(\tau_{A_C})$ für das geordnete Punktetripel (A, B, A_C) genau dann verschwindet – s. Satz III,15 –, wenn die Grundbeziehung „ist synchron“ für die Momente t_{A_C} und t_{B/A_C} symmetrisch ist. Dabei ist interessanter Weise die Umlaufgeschwindigkeit $c_{ABC}(\tau_{A_C})$ eines Suprasignals mit der Zwei- bzw. Dreikörperaberration $\Phi_{ABC}(\tau_{A/C})$ durch folgende Beziehung verknüpft:

$$c_{ABC}(\tau_{A/C}) = c_A \left(1 + \frac{\Phi_{ABC}(\tau_{A/C})}{c_A^2} \right),$$

wobei $c_A = \text{const} > 0$ die Umlaufgeschwindigkeit eines Suprasignals über drei beliebige Punkte des Körpers $\mathcal{K}(T_A)$ ist. Diese Beziehung ist insofern bemerkenswert, als sie dem äußeren Aussehen nach genau mit einem Ausdruck für die Lichtgeschwindigkeit c im Gravitationsfeld mit dem Potential Φ übereinstimmt, den A. Einstein im Rahmen der Vorarbeiten auf seine allgemeine Relativitätstheorie in seinen Arbeiten [6] und [7] herleitet. Er wies nach, daß in erster Näherung gelten muß:

$$c = c_0 \left(1 + \frac{\Phi}{c_0^2} \right),$$

d. h., im Gravitationsfeld ist die Lichtgeschwindigkeit nicht mehr konstant.

Die im allgemeinen bestehende Asymmetrie und Intransitivität der Grundbeziehung „ist synchron“ wirft die Frage nach den Eigenschaften solcher Körpersysteme auf, in denen Körper dadurch ausgezeichnet sind, daß für deren Eigenzeit und die Eigenzeit aller anderen Körper im System diese Grundbeziehung transitiv oder symmetrisch ist. Derartige Körpersysteme – sie heißen Körpersysteme mit Zentralkörpern – werden zum Abschluß von Kapitel III untersucht. Von besonderem Interesse sind hierbei die zentrischen Systeme – Unterpunkt 4.2.2 –, weil sich auf diese Systeme eine geochronometrische Theorie der Elementarteilchen gründen läßt, allerdings auf der Basis der erweiterten Geochronometrie mit nichtdisjunkten Zeitfolgen von K. Linke [11].

Im Kapitel IV kommen noch die Axiome der Körper (7 Axiome) hinzu. Es wird auf der Basis der im Kapitel III eingeführten Abstandsmessung mittels Suprasignalpeilung unter Hinzunahme einiger Axiome in den Körpern eine innere Längenmessung durch Abtragen eines Einheitsstabes ermöglicht und eine Winkelmessung definiert.

In der Untergruppe der Axiome der Stabmessung (2 Axiome) wird zunächst das Stetigkeitsaxiom IV,1 für Stäbe eingeführt, aus dem, allerdings nur für Stäbe – nicht für Körperdurchstiche –, alle üblichen Stetigkeitssätze (Sätze IV,5-7) folgen: das Dedekindsche Prinzip, das Cantorsche Prinzip und das Archimedische Prinzip erster Art. Das Archimedische Prinzip zweiter Art (Satz IV,21) ist erst später unter Einbeziehung des Symmetrieaxioms IV,2 für Stäbe beweisbar.

Im weiteren Verlauf der Abhandlung ist ein zentraler Begriff der des Mittelpunktes A_0 eines Stabes, definiert durch die Gleichheit der mittels Suprasignalpeilung gemessenen Abstände zu beiden Endpunkten des Stabes in einem Moment t_0 der Eigenzeit des Körpers, in dem der Stab enthalten ist. Die Hinzuziehung des Axioms

IV,2 der Symmetrie (für Stäbe) bewirkt, daß die Abstandsmessung zweier Punkte in Körpern durch Suprasignalpeilung in jedem Moment der Eigenzeit symmetrisch ist (s. Satz VI,12), und der Mittelpunkt eines Stabes erweist sich als zeitinvarianter Begriff (s. Satz IV,19). Das Archimedische Prinzip sichert sodann das zeitunabhängige Abtragen von Stäben und Teilstäben, die durch Mittelpunktteilung aus diesen Stäben entstehen, womit eine innere Längenmessung jedes Stabes auf jedem Körperdurchstich definiert werden kann. Diese Stabmessung ist symmetrisch und additiv; sie läßt sich jedoch im allgemeinen nicht einheitlich im ganzen Körper realisieren, da sich die Längen von Stäben, gemessen mit Suprasignalpeilungen, auf verschiedenen Körperdurchstichen mit der Zeit unterschiedlich verändern können. Auf jedem Körperdurchstich ist gesondert ein Einheitsstab festzulegen, weil es im allgemeinen keine Möglichkeit gibt, diesen Maßstab von einem Körperdurchstich auf einen anderen zu übertragen, so daß ihre Gleichheit in jedem Moment der Eigenzeit des Körpers gewährleistet ist. Nur in speziellen Körpern ist dies möglich, so in den Isotropiekörpern (darunter auch die starren Körper), in denen für je drei Punkte A_0, A_1, A_2 in allgemeiner Lage aus der Gültigkeit der Gleichheit

$$\varrho_{A_0 A_1}(\tau_0) = \varrho_{A_0 A_2}(\tau_0)$$

in einem Moment ihrer Eigenzeit die Gültigkeit dieser Gleichheit in jedem Moment t ihrer Eigenzeit folgt, so daß sich in diesen Körpern die zeitliche Änderung der Signalabstände unabhängig von der Wahl des Körperdurchstichs („der Richtung“) vollzieht. Diese Isotropiekörper erweisen sich als metrische Räume bezüglich der Stabmessung (s. Satz IV,35).

Im Punkt 2 des Kapitels IV weiche ich von der Wagnerschen Axiomatik ab. Sein Axiom IV,3 in [21], in dem er die Existenz einer geodätischen Kreisumgebung in jedem Punkt eines jeden Querschnitts eines Körpers in jedem Moment von dessen Eigenzeit postuliert, wird durch vier einfache Axiome IV,3-6 für gleichschenklige Stabdreiecke ersetzt. Dieses Vorgehen erschien mir übersichtlicher; denn geodätische Kreisumgebungen sind solche Kreisumgebungen U_o , in denen von jedem Punkt A auf jedem Körperdurchstich, der mit U_o nicht durchschnittsfremd ist und den Punkt A nicht enthält, das Lot gefällt werden kann. Mein Vorgehen ermöglicht es, die geodätischen Kreisumgebungen gänzlich zu eliminieren und ausschließlich mit gewöhnlichen Kreisumgebungen zu arbeiten. Außerdem können viele Konstruktionen ausgeführt werden, ohne überhaupt eine Kreisumgebung heranziehen zu müssen.

Die metrischen Dreiecksaxiome IV,3-6 erlauben die Einführung solch wichtiger Begriffe wie Senkrechte errichten, Lot fällen, rechter, spitzer, stumpfer Winkel und Winkelhalbierende. Wird noch das Axiom IV,7 der Winkelsymmetrie hinzugefügt – es ist für Isotropiekörper beweisbar, nicht aber für beliebige Körper –, so läßt sich schließlich jedem Winkel in eindeutiger Weise durch Ergänzung des gegebenen Winkels zu einem gestreckten Winkel und Einschachtelung dieses Winkels, die durch wiederholte Halbierung eines rechten Winkels entsteht, im Vergleich zu diesem rechten Winkel eine Maßzahl zuordnen. Die Winkelmessung wird sodann auch auf überstumpfe Winkel, den Vollwinkel und den leeren Winkel ausgedehnt (s. Sätze IV,111 und IV,118). Dieses Winkelmaß ist aber im allgemeinen nur in Isotropiekörpern auf Grund des Satzes IV,120 zeitunabhängig. Überdies ist es abhängig von der Wahl des rechten Winkels. Erst für Hyperisotropiekörper – das sind Isotropiekörper, die

mit einer zusätzlichen Eigenschaft ausgestattet sind (s. Definition IV,27) – kann gezeigt werden, daß in ihnen die Winkelmessung unabhängig von der Wahl des rechten Winkels ist, sofern die rechten Winkel denselben Scheitel besitzen (s. Satz IV,136). Es konnte nicht nachgewiesen werden, daß jeder Isotropiekörper auch ein Hyperisotropiekörper ist.

Den Abschluß des Kapitels IV bildet mit Punkt 3 die Einführung von Polarkoordinaten im ganzen Raum bezüglich eines beliebigen Körpers.

Das Kapitel V ist der Untersuchung der inneren Geometrie der Hyperisotropiekörper gewidmet.

In Punkt 1 wird zunächst die lokale Spiegelsymmetrie von Isotropiekörpern betrachtet, um dann nachzuweisen, daß jeder Hyperisotropiekörper in jedem seiner Punkte ein spiegelsymmetrischer Körper ist. Die Eigenschaften der Spiegelungsabbildungen in Hyperisotropiekörpern werden im anschließenden Punkt 2 dargelegt. In genügend kleinen Kreisumgebungen der Querschnitte von Hyperisotropiekörpern, den spiegelsymmetrischen Kreisumgebungen $U_\bullet$, die sich dadurch auszeichnen, daß jeder ihrer Punkte eine Kreisumgebung besitzt, die $U_\bullet$ einschließlich ihres Randes enthält – jeder Punkt eines Körperquerschnitts eines Hyperisotropiekörpers besitzt eine spiegelsymmetrische Kreisumgebung (s. Satz V,I7) – lassen sich für die Stabdreiecke alle aus der absoluten Geometrie bekannten Eigenschaften von Dreiecken beweisen, darunter auch alle Dreieckskongruenzsätze und der Außenwinkelsatz mit seinen Folgerungen. In Punkt 4 werden ausführlich die Eigenschaften der Saccherischen und Lambertschen Vierecke in Hyperisotropiekörpern untersucht. Für diese Vierecke in spiegelsymmetrischen Kreisumgebungen gelten alle aus der absoluten Geometrie bekannten Eigenschaften, einschließlich des Satzes über die Winkelsumme im Dreieck (Satz V,26). Dabei kann allerdings die Hypothese des stumpfen Winkels nicht eliminiert werden; es ergibt sich lediglich eine Einschränkung für das Winkelmaß des stumpfen Winkels (Satz V,27).

Im Punkt 5 wird schließlich gezeigt, daß in jedem Querschnitt eines Hyperisotropiekörpers mit Hilfe der Stabmetrik innerhalb jeder spiegelsymmetrischen Kreisumgebung ein Bogenmaß eingeführt werden kann, das sich einheitlich für den ganzen Körperquerschnitt als euklidisch, hyperbolisch oder elliptisch mit gleicher konstanter Gaußscher Krümmung erweist (s. die Sätze V,40-41). Daraus ergibt sich die isometrische Einbettbarkeit jedes Körperquerschnitts eines Hyperisotropiekörpers global entweder in die euklidische oder die hyperbolische oder aber die elliptische Ebene (s. Satz V,51). Das besagt aber noch nicht, daß sich auch jeder Hyperisotropiekörper entweder in den dreidimensionalen euklidischen oder hyperbolischen oder aber elliptischen Raum isometrisch einbetten läßt; es wird jedoch eine notwendige und hinreichende Bedingung angegeben, unter der eine isometrische Einbettung möglich ist (s. Satz V,52).

Es ist vielleicht interessant, einmal zu vergleichen, welche Axiome des Hilbertschen Axiomensystems der euklidischen Geometrie auch für die Punkte, Körperdurchstiche und Körperquerschnitte in der Geochronometrie der Körper Gültigkeit haben. Wird die Grundrelation „inziert“ als „gehört an“, „ist enthalten in“ definiert, so folgen in offensichtlicher Weise alle Inzidenzaxiome aus den Axiomen der

Gruppe II, und zwar in beliebigen Körpern. Ebenso sind in allen Körpern für die Punkte der Körperdurchstiche die Aussagen der Hilbertschen Axiome der linearen Anordnung erfüllt (s. die Sätze II,52-54). Für die Punkte der Körperquerschnitte gilt auch die Aussage des Axioms von Pasch (s. Satz II,121). Wie schon erwähnt, gelten für die Stäbe eines jeden Körperdurchstichs die üblichen Stetigkeitssätze. Was das Parallelenaxiom angeht, so gilt nicht das der euklidischen Geometrie, sondern das von Lobačevski (s. Satz II,123), was jedoch auf die innere Geometrie der Körper keinen Einfluß hat, weil die Körperdurchstiche keine unendliche Ausdehnung haben. Bei der Gültigkeit der Aussagen der Kongruenzaxiome gibt es starke Einschränkungen. Wird die Kongruenz von Stäben oder Winkeln über die Gleichheit ihrer Maßzahlen bezüglich eines fixierten Maßstabes bzw. rechten Winkels definiert, so können die Stäbe nur innerhalb von Stäben abgetragen werden (s. Satz IV,23) und überdies wegen der Nichtübertragbarkeit des Maßstabes nur in Stäben desselben Körperdurchstichs, sofern kein Isotropiekörper oder Hyperisotropiekörper vorliegt; kongruente Stäbe, also Stäbe gleicher Länge, sind nur vergleichbar, wenn sich die Länge auf denselben Maßstab bezieht. Beim Antragen von Winkeln bestehen ähnliche Einschränkungen (vgl. Satz IV,112), sofern kein Hyperisotropiekörper vorliegt. Die Kongruenzsätze für Dreiecke schließlich gelten nur lokal in Hyperisotropiekörpern.

Im Kapitel VI wird die Widerspruchsfreiheit der Axiome der Gruppen I-IV nachgewiesen, und zwar an Hand eines Modells im dreidimensionalen euklidischen Vektorraum $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ über dem Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen, das ursprünglich für die Axiomengruppen I-III von E. Herrmann entwickelt wurde. Es läßt sich problemlos auch auf die Axiomengruppe IV ausdehnen.

Für die Gestaltung und drucktechnische Anfertigung des Manuskriptes einschließlich der Zeichnungen bin ich meiner Frau B. Frank zu höchstem Dank verpflichtet. Ohne ihr Zutun hätte das Manuskript wohl nie die Druckreife erlangt.

Berlin, Juli 2009

H. Frank

Inhaltsverzeichnis

VORWORT	i
PRÄSUMTION	1
KAPITEL I. Axiomengruppe I: Die Axiome der Zeit	2
KAPITEL II. Axiomengruppe II: Die Axiome der Raum-Zeit-Struktur	14
1 Die Axiome der Punkt-Zeit-Verknüpfung	14
2 Die Axiome der Strecke	14
2.1 Axiomatische und abgeleitete Eigenschaften der Strecke . . .	14
2.2 Die Verlängerung einer Strecke	18
2.3 Die Gerade	22
2.4 Anordnung der Punkte auf einer Geraden	24
3 Die Axiome des Körperdurchstichs und des Dreiecks	29
3.1 Die Axiome und ergänzende Folgerungen	29
3.2 Struktureigenschaften des Körperdurchstichs	41
3.3 Dreiecke	44
3.4 Die Ausbreitung eines Dreiecks	50
3.5 Winkel	68
3.6 Die Ebene	72
3.7 Anordnung der Punkte in der Ebene	82
3.8 Der Körperquerschnitt	108
4 Die Axiome der Dimension	112
4.1 Das erste Axiom der Dimension	112
4.2 Tetraeder	113
4.3 Die Ausdehnung eines Tetraeders	121
4.4 Räumliche Winkel	166
4.5 Der Raum	180
4.6 Anordnung der Punkte im Raum	186
4.7 Das zweite Axiom der Dimension	215
5 Die Axiome des Raumes	221
KAPITEL III. Axiomengruppe III: Die Axiome der Signale	233
1 Die strukturellen Signalaxiome	233
2 Die Koeffizientenmethode für Punktepaaire	238
2.1 Der ε -Koeffizient	238

2.2	Die α -Koeffizienten	239
2.3	Die β -Koeffizienten und ihr Zusammenhang mit den α -Koeffizienten	242
2.4	Die Zeitdilatation	244
2.5	Transformation der α - und β -Koeffizienten bei neuer Wahl der Einheit der Zeitmessung	245
2.6	Die α - und β -Funktionen	247
2.7	Die α -Funktion für Punktepaare desselben Körpers.	255
3	Die metrischen Signalaxiome	256
3.1	Der Abstandsbegriff	256
3.2	Die Umlaufgeschwindigkeit eines Suprasignals. Die Zwei- und Dreikörperaberration.	263
3.3	Die metrischen Signalaxiome	269
3.4	Die Dreiecksungleichungen	281
4	Körpersysteme mit Zentralkörpern	286
4.1	Zentralkörper von Körpersystemen	286
4.2	Klassifikation der Körpersysteme mit Zentralkörpern und ihre Hierarchie	297
4.2.1	Äquivalenzsysteme	297
4.2.2	Zentrische Systeme	298
4.2.3	Disperse Systeme	306
4.2.4	Peripher-symmetrische Systeme	307

KAPITEL IV. Axiomengruppe IV: Die Axiome der Körper 311

1	Die Axiome der Stabmessung	311
1.1	Das Stetigkeitsaxiom	311
1.2	Das Axiom der Symmetrie	329
1.3	Die Stabmessung	358
1.4	Isotropiekörper und starre Körper	379
1.4.1	Die Isotropiekörper und ihre Metrik	379
1.4.2	Starre Körper	391
2	Die Winkelmessung	394
2.1	Die metrischen Dreiecksaxiome	394
2.2	Kreisumgebungen	409
2.3	Senkrechte und Lot	427
2.4	Senkrechte im Isotropiekörper	437
2.5	Bogensehnen einer Kreisumgebung	441
2.6	Rechter, spitzer und stumpfer Winkel	447
2.7	Tangenten an eine Kreisumgebung	464
2.8	Die Existenz der Tangenten an eine Kreisumgebung in beliebigen Körpern	472
2.9	Ebene Symmetrieeigenschaften der Isotropiekörper	479
2.10	Das Axiom der Winkelsymmetrie. Die Winkelhalbierende	493
2.11	Das Winkelmaß	527
2.12	Das Winkelmaß in Isotropiekörpern	557
2.13	Das Winkelmaß in Hyperisotropiekörpern	587

3	Polarkoordinaten	610
3.1	Ebene Polarkoordinaten	610
3.2	Räumliche Polarkoordinaten	630
KAPITEL V. Die Geometrie der Hyperisotropiekörper		632
1	Spiegelsymmetrische Körper	632
2	Eigenschaften der Spiegelungsabbildungen in Hyperisotropiekörpern	653
3	Metrische Eigenschaften der Stabdreiecke in Hyperisotropiekörpern .	659
3.1	Isometrische Abbildungen von Stabdreiecken	659
3.2	Die Kongruenz von Stabdreiecken	664
3.3	Der Außenwinkelsatz und seine Folgerungen	668
4	Saccherische und Lambertsche Vierecke	678
5	Die Metrik der Hyperisotropiekörper	725
5.1	Einige Hilfsfunktionen	725
5.2	Die Geometrie der Körperquerschnitte von Hyperisotropiekörpern	785
5.2.1	Die Länge eines Kreisbogens	785
5.2.2	Das ebene Bogenelement in Polarkoordinaten	793
5.2.3	Einige topologische Eigenschaften von Körperquerschnitten .	807
5.2.4	Die Einbettung der Körperquerschnitte von Hyperisotropiekörpern in die euklidische, hyperbolische oder elliptische Ebene	810
5.3	Die isometrische Einbettbarkeit eines Hyperisotropiekörpers in den euklidischen, hyperbolischen oder elliptischen Raum .	818
5.4	Hyperisotropiekörper mit stetiger Krümmung	823
KAPITEL VI. Die Widerspruchsfreiheit der Axiome		825
LITERATURVERZEICHNIS		861